**Quiz 4**

Αγγέλου Αρετή-Χριστίνα

Αεμ:789

1. C

Εστω y=ax + b και σημεία (x1,y1),(x2,y2),(x3,y3)

E2(X) = (y1 -ax1 –b)2 + (y2 –ax2 –b)2 + (y3 –ax3 –b)2 = (y1 –f(x1))2 + (y2 –f(x2))2 + (y3 –f(x3))2

Γενικεύοντας έχουμε E2(X) = $\sum\_{i=1}^{n}[y$i – f(xi)]2

1. C

 1 1 1

A= 1 20 b= 400 ΑΤ = 1 1 1 1

1. 30 800 1 20 30 40

 1 40 1300

ΑΤ Α= 4 90

 90 2901

ΑΤ b= 2501

 84001

ΑΤ Αx = ΑΤ b => 4 90 a0  = 2501 => a1=31.65

 90 2901 a1 84001

1. B

 1 1

A= 20 b= 400 ΑΤ = 1 20 30 40

 30 800

 40 1300

ΑΤ Α= 2901

ΑΤ b= 84001

ΑΤ Αa = ΑΤ b => 2901a=84001 => a=28.95

1. C

Βρίσκω τα $\sum\_{i=1}^{4}\left(Ax-b\right)$2  για κάθε επιλογή και επιλέγω την μικρότερη

α) (60∙1- 1200 -1)2 + (60∙10 - 1200 -100)2 + (60∙20 - 1200 -400)2 + (60∙30- 1200 -600)2 + (60∙40 - 1200 -1200)2 = 1951881

b) (30∙1- 200 -1)2 + (30∙10 - 200 -100)2 + (30∙20 - 200 -400)2 +(30∙30- 200 -600)2 + (30∙40 - 200 -1200)2 = 79241

c) (29.648$∙$1- 139.43 -1)2 + (29.648$∙$10- 139.43 -100)2 + (29.648$∙$20- 139.43 -400)2 + (29.648$∙$30- 139.43 -600)2 + (29.648$∙$40- 139.43 -1200)2 = 64547.86

d) (22.782∙1 +1 -1)2 +(22.782∙10 +1 -100)2 +(22.782∙20 +1 -400)2 +(22.782∙30 +1 -600)2 + (22.782∙40 +1 -1200)2 =248569.73

1. A) Οι συνθήκες είναι : $\frac{∂Sr}{∂a0}$=0 , $\frac{∂Sr}{∂a1}$=0

 1 x1

 1 x2

Αν Α= . . και x = a0

 . . a1

 1 xn

πρέπει να ισχύει ΑΤΑx=ΑΤb δηλαδή το διάνυσμα p=b-Ax να ανήκει στον αριστερό μηδενόχωρο του χώρου στηλών του Α. Άρα πρέπει να ΑΤΑx=ΑΤb => x= (ΑΤΑ)-1ATb Απ’ όπου βγαίνει : a0=$\frac{\sum\_{ι=1}^{n}yi-\sum\_{i=1}^{n}a1xi}{n}$ a1=$\frac{\sum\_{ι=1}^{n}xiyi-\sum\_{i=1}^{n}a0xi}{\sum\_{i=1}^{n}xi2}$

 B) $\frac{∂f}{∂x}$=-2$\sum\_{i=1}^{n}byi$ +2$\sum\_{i=1}^{n}ab$ +2$\sum\_{i=1}^{n}b2xi$

 $\frac{∂2f}{∂x2}$=2$\sum\_{i=1}^{n}b2$ = 2nb2 >0

 $\frac{∂f}{∂y}$=2$\sum\_{i=1}^{n}yi$ -2$\sum\_{i=1}^{n}a$ -2$\sum\_{i=1}^{n}bxi$

 $\frac{∂2f}{∂y2}$ = 2n >0 $\frac{∂2f}{∂x∂y}$=-2nb

 $\frac{∂2f}{∂x2}$ $\frac{∂2f}{∂y2}$ - $\left(\frac{∂2f}{∂x∂y}\right)$2=(2nb2)(2n)-(4n2b2) = 0 άρα το ακρότατο καθορίζεται από το πρόσημο του τρίτου όρου του πολυωνύμου Taylor.

Και επειδή $\frac{∂2f}{∂x2}$.>0 και $\frac{∂2f}{∂y2}>0$ η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω άρα έχει ελάχιστο.

 Γ) το διάνυσμα b προβάλλεται σε ένα σημείο στο χώρο στηλών του Α γι’ αυτό έχουμε μοναδικότητα.

1. Α) c= $\sum\_{ι=1}^{n}E$i = [4-(a0+a1x)] + [6-( a0+a1x)] + [6-( a0+a1x)] +[8-( a0+a1x)]

$\frac{∂A}{∂x}$= -4a1 => a1=0

c=(4+6+6+8) - 4a1 => c= 24- 4a0 =0 άρα η ελάχιστη τιμή του c είναι a0=6

Άρα y=6

B) $\sum\_{ι=1}^{n}|E$i|= |4-(a0+a1x)| + |6-( a0+a1x)| + |6-( a0+a1x)| + |8-( a0+a1x)|

Λόγω απολύτων τιμών πρέπει ο κάθε όρος να γίνει απολύτως ελάχιστος. Εφαρμόζω μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

 1 2

Α= 1 3 ,ΑΤ = 1 1 1 1 , ΑΤΑ= 4 10 , ΑΤb= 24 , x = a0

 1 2 2 3 2 3 10 26 62 a1

1. 3

ΑΤΑx=ΑΤb => a1 =1 και a0 = 3,5

y=3,5+ x

1. A,C

 y = aebx

 lny=ln(aebx)

 lny=lna + lnebx

 lny=lna + bxlne

 lny=lna + bx

**9)** α,β,δ,ε

α)ΑΤr=0 : το r είναι κάθετο σε οποιοδήποτε διάνυσμα της μορφής Ax

β) r κάθετο στο range(A)

 δ) 2xTATA–2bAT=0 η ATAx=ATb

 f(x)=||r||22=(r,r)=(b-Ax,b-Ax)=bTb-2xTATb+xTATAx

 f(x)=0 ⬄2ATAx-2ATb=0 ⬄ ATAx=ATb

 ε) Το πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων έχει λύση και είναι μοναδική αν Α είναι πλήρης τάξης.

**12)** Έχουμε τον πίνακα

 $\left[\begin{matrix}1&-1&0\\-1& 2&-1\\0&-1&1\end{matrix}\right]$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Α είναι:

det(A-λI)=0 => $\left[\begin{matrix}1-λ&-1&0\\-1&2-λ&-1\\0&-1&1-λ\end{matrix}\right]$= 0=> (1-λ)$\left|\begin{matrix}2-λ&-1\\-1&1-λ\end{matrix}\right|$ +1$\left|\begin{matrix}-1&-1\\0&1-λ\end{matrix}\right|$=0 =>

(1-λ)((2-λ)(1-λ)-(-1)(-1))+((-1)(1-λ)-0)=1-3λ+λ2-λ+3λ2-λ3-1+λ=0 =>

-λ3 +4λ2-3λ=0

οι ιδιοτιμές του είναι : λ=0, λ= 1, λ=3

για λ=0 $\left[\begin{matrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{matrix}\right]\left[\begin{array}{c}x1\\x2\\x3\end{array}\right]$=$\left[\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}\right]$ x1= x2, x2= x3, με ιδιοδιάνυσμα$ \left[\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right]$

για λ=1 $\left[\begin{matrix}0&-1&0\\-1&1&-1\\0&-1&0\end{matrix}\right]\left[\begin{array}{c}x1\\x2\\x3\end{array}\right]$=$\left[\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}\right]$ 0= x2, x1= -x3, με ιδιοδιάνυσμα$ \left[\begin{array}{c}1\\0\\-1\end{array}\right]$

για λ=3 $\left[\begin{matrix}-2&-1&0\\-1&-1&-1\\0&-1&-2\end{matrix}\right]\left[\begin{array}{c}x1\\x2\\x3\end{array}\right]$=$\left[\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}\right]$ -2x1= x2, x2= -2x3, με ιδιοδιάνυσμα$ \left[\begin{array}{c}1\\\frac{-1}{2}\\1\end{array}\right]$